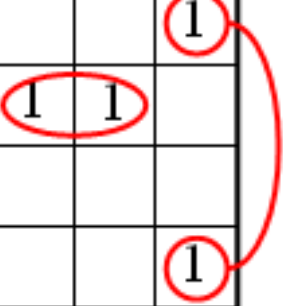


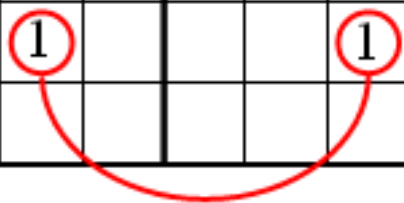
Минимизация логических функций

Вычислительная техника

$X_3 X_4$		00	01	11	10
$X_1 X_2$	00				1
	01		1	1	
	10				
	11				1



X_5		0				1			
$X_3 X_4$		00	01	11	10	00	01	11	10
$X_1 X_2$	00								
	01								
	10			1				1	
	11								



Минимизация

 упрощение формы записи

 схема реализуется с наименьшим числом элементов

Минимальная нормальная форма

Нормальная форма логической функции,
содержащая наименьшее число
элементов

Минимальная ДНФ = **МДНФ**

Минимальная КНФ = **МКНФ**

Логическая функция может иметь
несколько МДНФ или МКНФ
одинаковой сложности

Методы минимизации



```
graph TD; A[Методы минимизации] --> B[Непосредственных преобразований]; A --> C[Карно-Вейча]; A --> D[Квайна и Мак-Класки];
```

The diagram is a flowchart with a central title box at the top. Three arrows point downwards from this box to three separate boxes below. The left box is for direct transformations, the middle box is for the Karnaugh-Veitch method, and the right box is for the Quine and McCluskey method.

**Непосредственных
преобразований**

**Квайна и
Мак-Класки**

Карно-Вейча

МЕТОД НЕПОСРЕДСТВЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Минимизация логических функций

Метод непосредственных преобразований

Применение законов алгебры логики

Результат – **тупиковая** форма логической функции

Тупиковая форма

Логическое выражение, к слагаемым которого больше не могут быть применены операции склеивания

Для одной функции может существовать несколько тупиковых форм

Минимальная форма – тупиковая форма логической функции минимальной длины

Функции ***a*** и ***b*** называются
равносильными, если при
одинаковых входных данных
они принимают одинаковые
значения

$$a \equiv b$$

A spiral notebook binding is visible on the left side of the page, consisting of a series of metal loops.

ЗАКОНЫ ЛОГИКИ

1. Идемпотентность

$$a \ \& \ a \equiv a$$

$$a \ \vee \ a \equiv a$$

2. Коммутативность

$$a \& b \equiv b \& a$$

$$a \vee b \equiv b \vee a$$

3. Ассоциативность

$$a \& (b \& c) \equiv (a \& b) \& c$$

$$a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c$$

4. Дистрибутивность

$$a \& (b \vee c) \equiv (a \& b) \vee (a \& c)$$

$$a \vee (b \& c) \equiv (a \vee b) \& (a \vee c)$$

5. Закон двойного отрицания

$$\neg(\neg a) \equiv a$$

6. Законы поглощения

$$a \& (a \vee b) \equiv a$$

$$a \vee (a \& b) \equiv a$$

7. Законы де Моргана

$$\neg(a \vee b) \equiv \neg a \ \& \ \neg b$$

$$\neg(a \ \& \ b) \equiv \neg a \vee \neg b$$

8. Закон исключённого третьего

$$\neg a \vee a \equiv 1$$

9. Закон противоречия

$$\neg a \ \& \ a \equiv 0$$

10. Свойства тавтологии и противоречия

$$1 \& a \equiv a \qquad 1 \vee a \equiv 1$$

$$0 \& a \equiv 0 \qquad 0 \vee a \equiv a$$

$$\neg 0 \equiv 1 \qquad \neg 1 \equiv 0$$

11. Законы склеивания

$$(a \ \& \ b) \vee (a \ \& \ \neg b) \equiv a$$

$$(a \vee b) \ \& \ (a \vee \neg b) \equiv a$$

12. Законы поглощения

$$a \& (a \vee b) \equiv a$$

$$a \vee (a \& b) \equiv a$$

Пример

Минимизировать СДНФ

$$\begin{aligned} &(\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee \\ &\vee (A \cdot \neg B \cdot C) \vee \\ &\vee (A \cdot B \cdot C) \end{aligned}$$

Пример

$$\begin{aligned} &(\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot \neg B \cdot C) \vee \\ &\vee (A \cdot B \cdot C) \equiv \end{aligned}$$

Пример

$$\begin{aligned} &(\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot \neg B \cdot C) \vee \\ &\vee (A \cdot B \cdot C) \equiv \end{aligned}$$

Пример

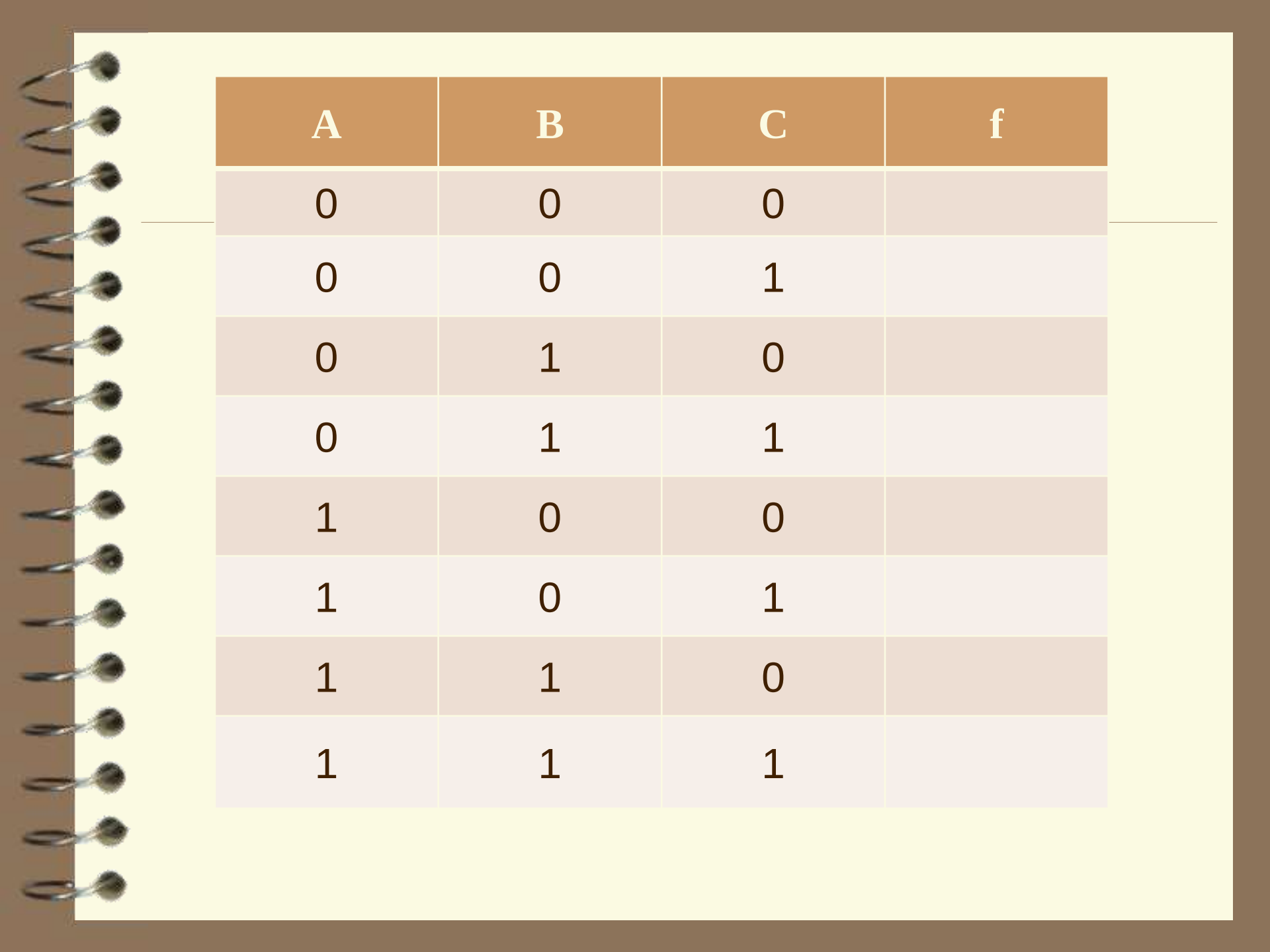
$$\begin{aligned} &(\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot \neg B \cdot C) \vee \\ &\vee (A \cdot B \cdot C) \equiv \end{aligned}$$

Пример

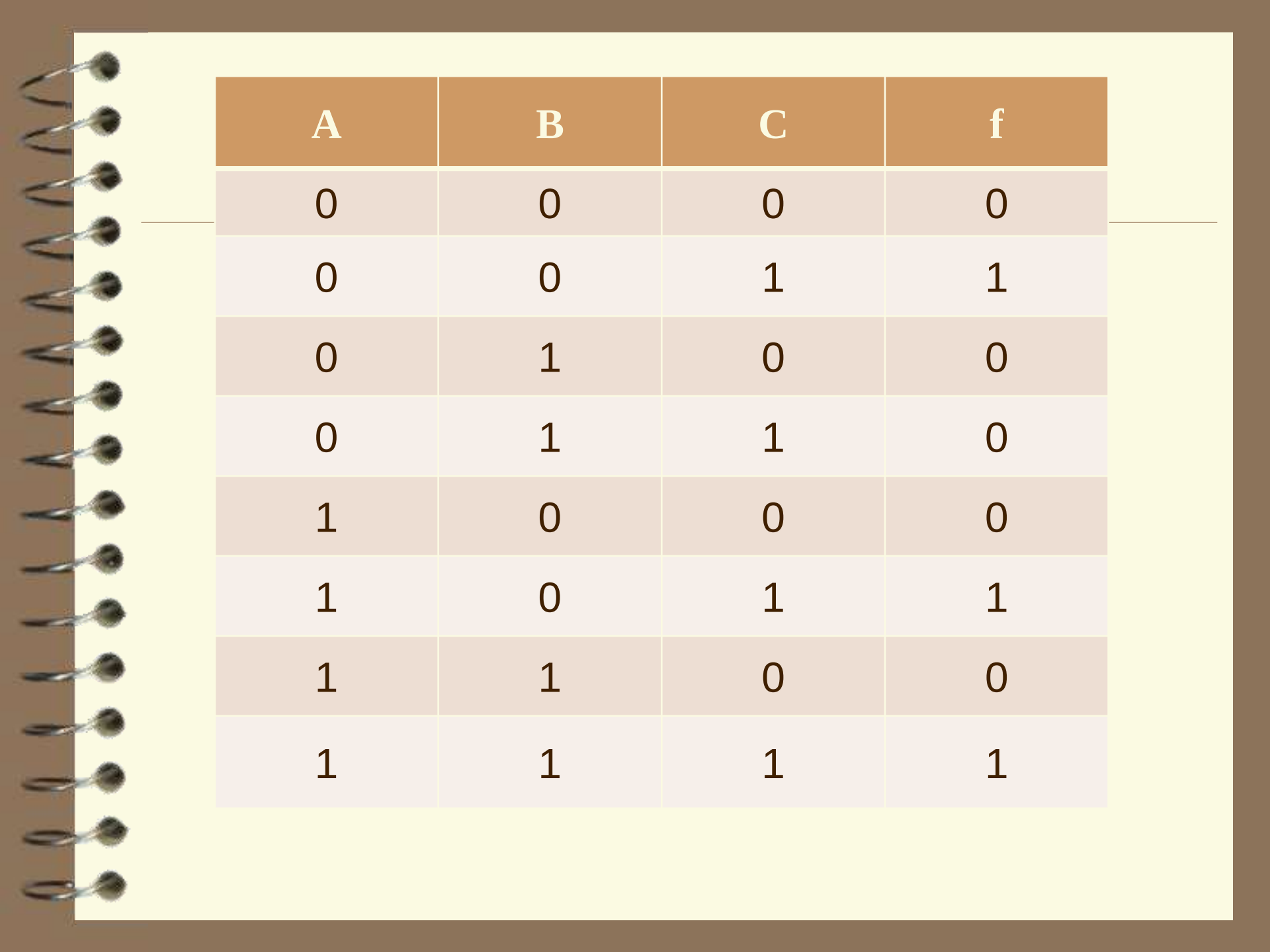
$$\begin{aligned} & (\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot \neg B \cdot C) \vee \\ & \quad \vee (A \cdot B \cdot C) \equiv \\ & (\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot \neg B \cdot C) \vee \\ & \quad \vee (A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot B \cdot C) \end{aligned}$$

Пример

$$\begin{aligned} & (\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot \neg B \cdot C) \vee \\ & \quad \vee (A \cdot B \cdot C) \equiv \\ & (\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot \neg B \cdot C) \vee \\ & \quad \vee (A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot B \cdot C) \\ & \equiv (\neg B \cdot C) \vee (A \cdot C) \equiv \\ & \equiv C \cdot (A \vee \neg B) \end{aligned}$$

A spiral-bound notebook with a cream-colored page and a brown cover. The spiral binding is on the left side. A table is drawn on the page.

A	B	C	f
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	



A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Проблема

Определить, какие элементарные
конъюнкции / дизъюнкции надо
склеивать

КАРТЫ ВЕЙЧА-КАРНО

Минимизация логических функций

Эдвард Вестбрук Вейч



1924 — 2013

Американский
физик

1952

«Метод диаграмм
для минимизации
логических
функций»

Морис Карно



Американский
физик

1953

Усовершенствовал
метод Вейча

род. 1924

Карта Карно

Графическое представление таблицы истинности логических функций

Таблица, содержащая по 2^n прямоугольных ячеек,
где n — число логических переменных

Код Грея

 система счисления, в которой два соседних значения различаются только в одном разряде

Пример

X_1	X_2	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

		X_2	
		0	1
X_1	0	1	0
	1	1	1

Пример

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Пример

А	В	0	0	1	1
	С	0	1	1	0
	0	0	1	0	0
	1	0	1	1	0

Пример

A	BC	00	01	11	10
	0	0	1	0	0
A	1	0	1	1	0

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Пример

		0	0	1	1	A
		0	1	1	0	B
0	0	0	0	1	0	
0	1	1	0	0	0	
1	1	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	0	
C	D					

Пример

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	0	0	1	0
	01	1	0	0	0
	11	0	0	0	0
	10	0	1	0	0

Пример

E		0				1			
AB		00	01	11	10	10	11	01	00
CD	00	0	0	1	0	0	1	0	1
	01	1	0	0	0	0	0	0	0
	11	0	0	0	0	0	0	0	1
	10	0	1	0	0	1	0	0	0

Правила

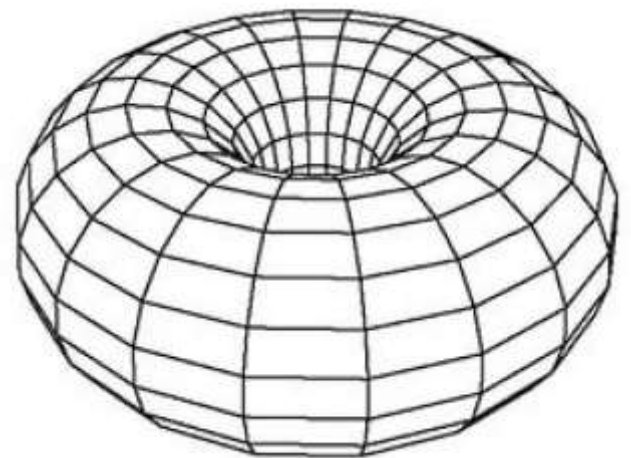
ДНФ **КНФ**

1. Объединяем смежные клетки с **единицами** (**нулями**) в максимально возможные области, содержащие 2^n клеток
2. В области **НЕ** должно находиться клеток, содержащих **нули** (**единицы**)
3. Области могут пересекаться
4. Возможно несколько вариантов покрытия

Правила

5. Крайние строки и столбцы являются соседними между собой

X_2X_3		00	01	11	10
X_1	1	1	0	0	1
	0	1	0	0	1



Правила

6. Несмежные области, расположенные симметрично оси(ей), могут объединяться в одну

E		0				1			
AB		00	01	11	10	10	11	01	00
CD	00	0	1	1	0	0	1	1	1
	01	1	0	0	0	0	0	0	0
	11	0	0	0	0	0	0	0	1
	10	0	1	0	0	1	0	0	0

Правила

7. Для каждой области записываем **конъюнкцию (дизъюнкцию)** переменных, не изменяющих своё значение

Если неизменная переменная равна **нулю (единице)** – инвертируем

8. **Конъюнкции (дизъюнкции)** областей объединяем **дизъюнкцией (конъюнкцией)**.

Пример

X_1	X_2	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

		X_2	
		0	1
X_1	0	1	0
	1	1	1

$$F = \neg X_2 \vee X_1$$

Пример – МДНФ

X_1	X_2	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

		X_2	
		0	1
X_1	0	0	1
	1	1	0

$$F = X_1 \cdot \neg X_2 \vee \neg X_1 \cdot X_2$$

Пример – МКНФ

X_1	X_2	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

		X_2	
		0	1
X_1	0	0	1
	1	1	0

$$F = (X_1 \vee X_2) \cdot (\neg X_1 \vee \neg X_2)$$

Пример

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Формула

$$\begin{aligned} &(\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee \\ &\vee (A \cdot \neg B \cdot C) \vee \\ &\vee (A \cdot B \cdot C) \end{aligned}$$

Совершенная дизъюнктивная
нормальная форма (СДНФ)

$$(A \vee B \vee C) \cdot$$

$$\cdot (A \vee \neg B \vee C) \cdot$$

$$\cdot (A \vee \neg B \vee \neg C) \cdot$$

$$\cdot (\neg A \vee B \vee C) \cdot$$

$$\cdot (\neg A \vee \neg B \vee C)$$

Совершенная конъюнктивная
нормальная форма (**СКНФ**)

Пример

А	В	0	0	1	1
	С	0	1	1	0
	0	0	1	0	0
	1	0	1	1	0

The table displays a 4x5 grid of binary values (0 and 1). The first column is labeled 'А', the second 'В', and the third 'С'. The values are as follows:

А	В	0	1	2	3
	В	0	0	1	1
	С	0	1	1	0
	0	0	1	0	0
	1	0	1	1	0

Two overlapping rounded rectangles highlight specific cells:

- A red rounded rectangle highlights the cells at (row 3, col 3), (row 3, col 4), (row 4, col 3), and (row 4, col 4).
- A green rounded rectangle highlights the cells at (row 4, col 3), (row 4, col 4), and (row 4, col 5).

The cells at (row 4, col 3) and (row 4, col 4) are the intersection of the two rectangles.

Пример

		В	0	0	1	1
		С	0	1	1	0
А	0	0	0	1	0	0
	1	1	0	1	1	0

$$F = \neg B \cdot C \vee A \cdot C$$

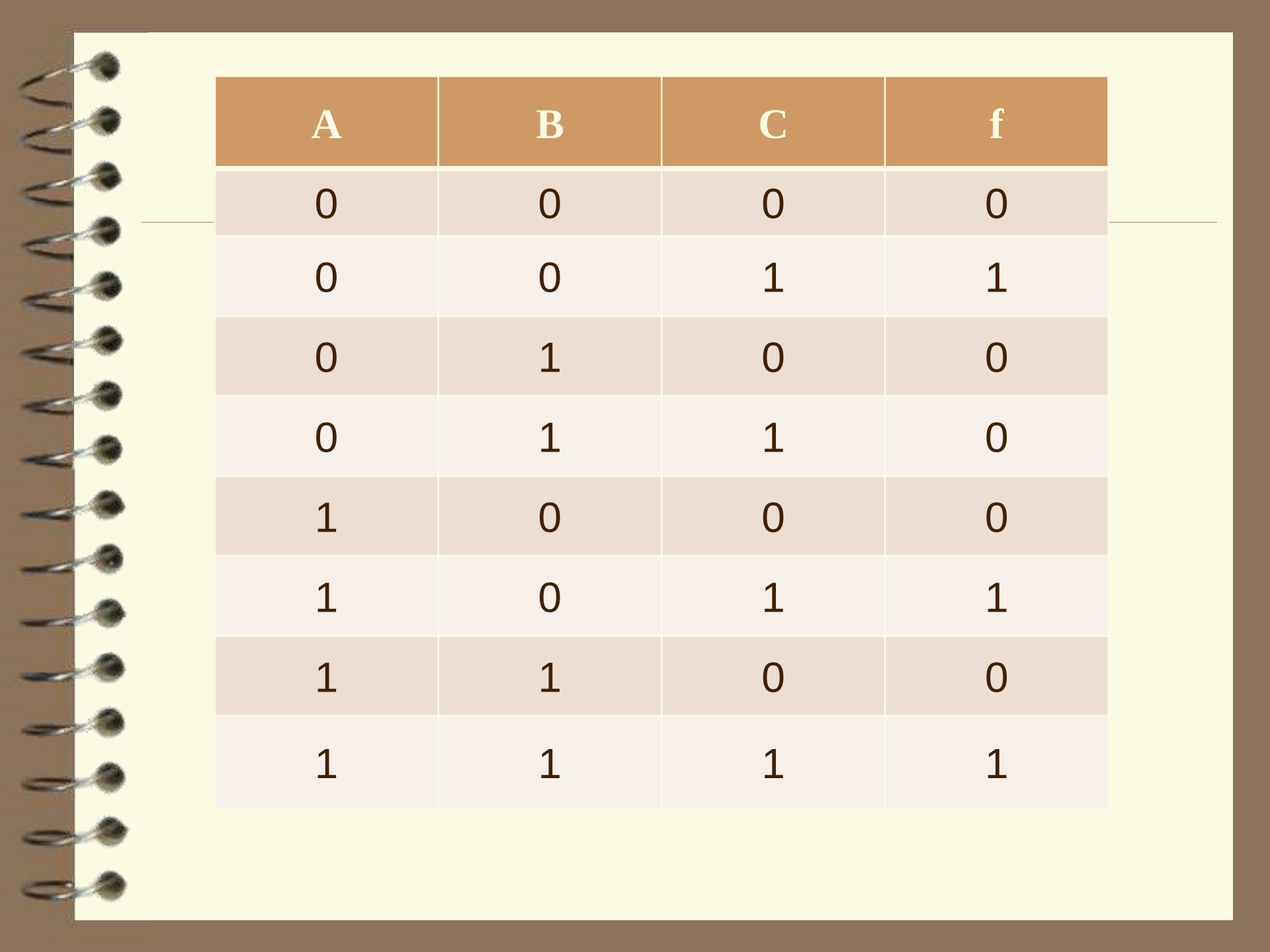
МДНФ

Пример

		В			
		0	0	1	1
		С			
		0	1	1	0
А	0	0	1	0	0
	1	0	1	1	0

$$F = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \vee \neg \mathbf{B})$$

МКНФ

A spiral-bound notebook with a cream-colored page and a brown cover. The spiral binding is on the left side. A table is drawn on the page.

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Недостатки

 Применим для функций до 7 переменных

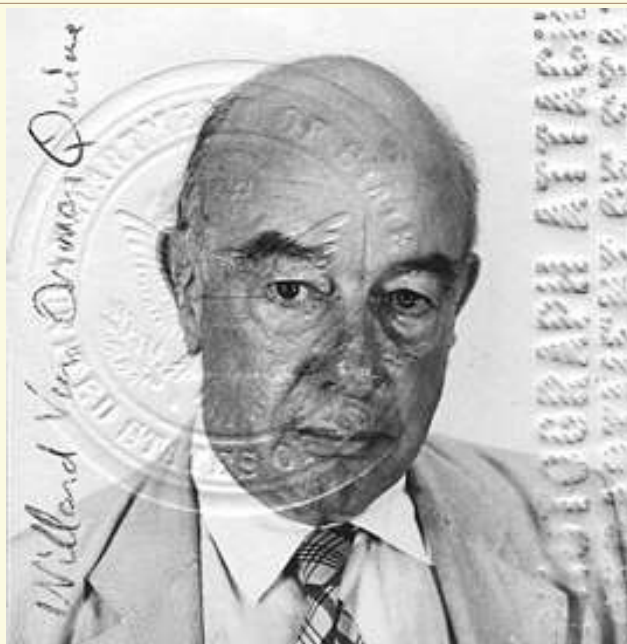
 Выбор областей – визуально

 Нет алгоритма, обеспечивающего оптимальное решение

МЕТОД КВАЙНА И МАК-КЛАСКИ

Минимизация логических функций

Виллард ван Орман Куайн



1908 — 2000

Американский
философ, логик и
математик

1993

премия Рольфа
Шока в области
ЛОГИКИ И
философии

Эдвард Дж. Мак-Класки



1908 — 2000

Почётный профессор
Стэнфордского
университета.

Пионер в области
электротехники

Первый алгоритм
проектирования
комбинационных схем

Метод Квайна и Мак-Класки

 целесообразно, когда число входных переменных превышает 6 – 7